11-NA04

マルチフィジックスおよび最適化問題に向けたハイパフォーマンス計算力学

樫山和男（代表者：中央大），牛島省（京都大），寺田賢二郎（東北大），
岡澤重信（広島大），木村一郎（北海道大），中畑和之（愛媛大），浅井光輝（九州大），
松本純一（産総研），岩下武史（京都大），小山田耕二（京都大）

概要　当研究課題では，固体材料力学，流体力学からマルチフィジックスおよび最適化問題にわたる広範囲の計算力学手法を大規模問題へ適用する検討を進めた. 本報告では，(1)有限積分法による大規模波動解析，(2)上昇気泡群シミュレーション，(3)物体輸送のための Euler 型固液二相流解析，(4)粒子法(SPH 法)によるハイブリット並列計算，(5)Phase-Field モデルを用いた有限要素法による気液二相流計算, (6)非定常 Navier-Stokes 方程式の形状最適化，という 6 つの研究成果を示す．いずれの研究においても，当研究課題の共同研究体制を基盤として, HX600 (京都大学) の 1,024 並列規模の計算における有効性が確認され，大規模計算における新たな展開が見い出されつつある.

1.　研究の目的と意義

数値解析技術の進歩，計算機の高性能化により，現在，計算力学は実験や理論のみでは取り扱いが困難であった各種の工学問題を解決するための有効な手法となっている．例えば，固体力学，流体力学の分野においてはマルチスケール理論や非線形力学理論，乱流のモデリングや多相流問題などを扱うことのできる解法が開発され，これらの物理問題を連成したマルチフィジックス（多重物理）解析の新しい計算法が提案されている．さらに，近年では現象の把握や予測のための数値シミュレーションに留まらず，解析によって得られた結果から，必要な設計条件を自動的に決定できる逆解析理論に基づいた最適制御・同定解析を可能とする数値解析技術開発の試みが行われている．こうした高度な数値解析技術の中には，その解法や計算アルゴリズムが並列計算に適していない場合も少なくなく，大規模並列計算を実現するには，開発した数値解析手法に大規模並列計算に適した解法への理論的展開や計算アルゴリズムを提案する必要がある．高度な数値解析技術のほとんどは，非常に多くの計算負荷を強いるため，その成果を工学分野の実現象に応用し，社会でさらに役立つ意義のあるものとするには，最新の並列計算機の能力を十分に発揮する計算アルゴリズムの導入や自由度の高い大規模高速計算を可能にする技術，現象を把握するための合理的な可視化技術の導入が不可欠となる．また，3 次元実モデルを対象としたマルチフィジックス解析や逆解析といった統合的な数値解析を実現するためには，さまざまな分野の数値解析技術の知識や知見が必然となる．このことから，本研究では，いくつかの代表的な計算力学分野における研究者と，計算機科学・可視化分野の研究者の協調的な研究体制をとる共同研究を進めることにより，計算力学分野に対して大規模高速計算に関わる最新技術を導入し，研究基盤の高度化と応用範囲の拡大を図ることを目的とする．

2.　当拠点公募型共同研究として実施した意義

(1) 共同研究を実施した大学名

本研究では,「学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点」のネットワーク型拠点のうち，京都大学を共同研究先としており，計算機環境としては Fujitsu HX600(T2K オープンスパコン, 1,024 コア) を利用した.

(2) 共同研究分野

本課題の共同研究分野は，超大規模数値計算系応用分野である．この研究グループでは，土木工学，機械工学分野における計算力学研究者が中心

となり，これに計算機科学分野のメンバーを加えた連携体制に基づいて，固体材料力学，流体力学からマルチフィジックスおよび最適化問題にわたる広範囲の大規模計算利用の有効性を検討している．

(3) 当公募型共同研究ならではという事項など

本研究の特色は大きく以下の 2 点にある．

・本研究では，特定の計算対象を設定するのではなく，土木工学や機械工学の広範囲にわたる複数の計算力学研究者の連携体制をとっている．すなわち，構造・材料力学，水理・流体力学，最適化問題など広範囲の応用対象を有する分野横断的な研究者が協調して，大規模計算における支配方程式の離散化手法や演算アルゴリズム，並列化手法や計算のプリ・ポスト処理など，分野共通技術に関する研究を進めている．

・共同研究先の拠点である京都大学学術情報メディアセンターのプログラム高度化支援研究者を加えることにより，計算力学分野の成果と大規模計算に関わる最新技術の融合を図り，研究基盤の高度化と応用範囲の拡大を目指している．

3. 研究成果の詳細

図 1 に示す構造解析，流体解析，連成解析，マルチフィジックス，最適化問題に関する(1)～(6)の研究成果について解説する．

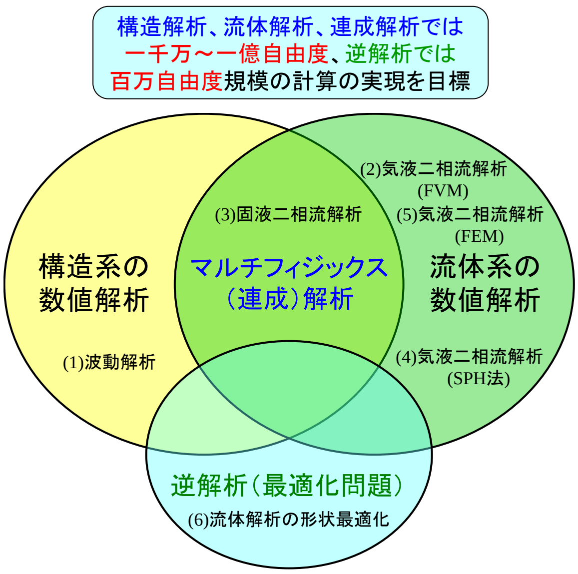


図 1　本研究課題における研究成果

本研究課題は，図 1 に示すように構造解析，流体解析あるいは連成解析，気液二相流解析，逆解析などの多くの数値解析分野の研究者によって構成されている．これらの研究者間の情報共有や協力，定期的に開催を行う予定の参加メンバー内での情報交換会を通じて，マルチフィジックスおよび最適化問題に向けたハイパフォーマンス計算力学に関する解析技術の開発を目的としている．今年度は，構造解析，流体解析，連成解析では一千万から一億自由度，逆解析では百万自由度規模の計算の実現を目標とした．

3.1 有限積分法による大規模波動解析【愛媛大：中畑和之】

3.1.1 大規模波動解析の問題点

音波・弾性波・電磁波等の物理波動は，物理地下探査，魚群探知，室内音響，振動，エレクトロニクス機器など広く工学問題に応用されている．これら波動の物理的な性質や適用分野は全く異なるが，支配方程式の観点でみればいずれも双曲型偏微分方程式であり，統一的なアプローチで波動問題を解くことができる．ここでは，数値解析法として，陽的有限積分法(FIT)を採用し，イメージベース処理を組み込んだ波動伝搬解析について，ハイパフォーマンスコンピューティングを導入した場合の成果を報告する．

FIT は時間領域の波動伝搬解析法であり，FDTD 法のように電場と磁場を陽的に求める．また，弾性波（音波）の場合，応力と速度を交互に更新する．本解析法の特徴は，数値モデルのボクセルと EFIT のセルのサイズ・位置を一致させることで，複雑な外部・内部形状を，少ない作業量でモデル化できることである．しかし，複雑形状が扱えるという利点の裏側で，コード内部では異種材料や吸収境界(PML)をセル毎に場合分けして計算を進めるため，非常に入り組んだネスト構造となっており，計算速度の低下を招いていた．また，これまで，高速化を意図して，計算領域を 1 次元方向に分割してプロセス並列を行い(1D-MPI)，分割された領域内で共有メモリを用いてスレッド並列を行うハイブリッド方法を既に導入していたが，期待したほどスケーラビリティが得られていなかっ

た．

3.1.2 コードの改良と検証

本研究では Lookup table を導入し，メインの計算が始まる前に予め材料を識別し，計算中はこの table を用いて効率よくデータを参照することにした．また，3D-MPI を導入し，さらにこの 3 次元方向に分割した計算領域でスレッド並列が実行できるように変更した．もちろん，スレッド並列を併用しないプロセス並列のみの計算方法(フラット MPI)も可能である．MPI/OpenMP ハイブリッド並列(4 プロセス(1D-MPI)×16 スレッド)，フラット MPI(3D-MPI,64 プロセス)，および逐次計算による実行時間の比較を図 2 に示す．

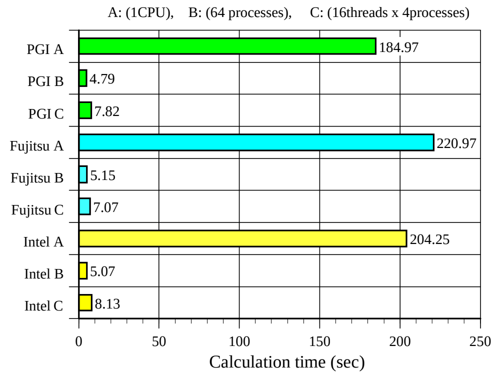


図 2 (A)逐次計算，(B)フラット MPI 並列計算，(C)ハイブリッド並列計算による実行時間の比較

図 2 は，200^3 ボクセルからなる均質・等方性の数値モデルを用い，1000 ステップの更新に要した時間をプロットしたものである．ここでは，コンパイラによる速度性能も検証するため，Intel(オプション -O3)，Fujitsu(オプション -Kfast)，PGI(オプション -fastsse)の 3 つを用いて比較した．コードは Fortran95 で書かれ，すべて倍精度で計算している．この結果から，コンパイラによる速度の差はあまり無く，また，いずれのコンパイラを用いた場合も，フラット MPI による計算が最も短い時間で終了した．次に，フラット MPI(3D-MPI)を導入した場合のスケーラビリティについて検証を行う．プロセス数を増加させた場合のスピードアップ S(1 プロセスと，複数プロセスを用いた場合の計算時間の比)を図 3 に示す．ボクセル数 500^3，1200^3，2000^3 の 3 種類のモデルに対して，プロセス数を変化させた場合の S を比較した．この結果，1000 プロセスを利用しても S はリニアに向上しており，改良コードでは非常に良い効率が得られた．

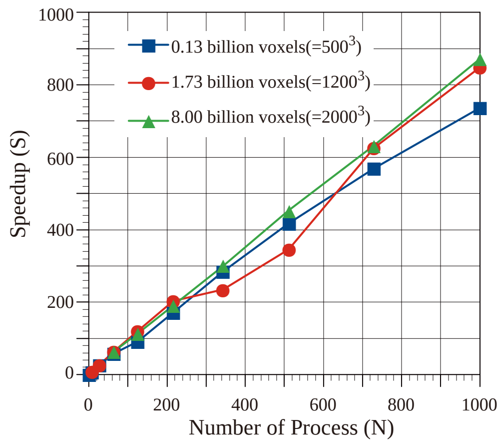


図 3 ボクセル数を変化させた場合のスケーラビリティ(Flat MPI 並列使用，I/O 時間は含まず，メイン計算の実行時間を計測．)

3.1.3 数値解析例

コンクリート内部の超音波伝搬解析例を示す．ここでは被検体の CT 写真を元に数値モデルを作成した．コンクリート被検体(高さ 100mm，断面 60mm×60mm)の断面 CT 写真を 400 枚撮影し，これを画像処理・補間してボクセル集合体を作成した．数値モデルは，セメントペースト，骨材，空隙の 3 相から構成される．骨材の体積率は 32.8%，微小空隙のそれは 0.3%である．プローブをコンクリート上部に設置したときの超音波伝搬の様子を図 4 に可視化した．

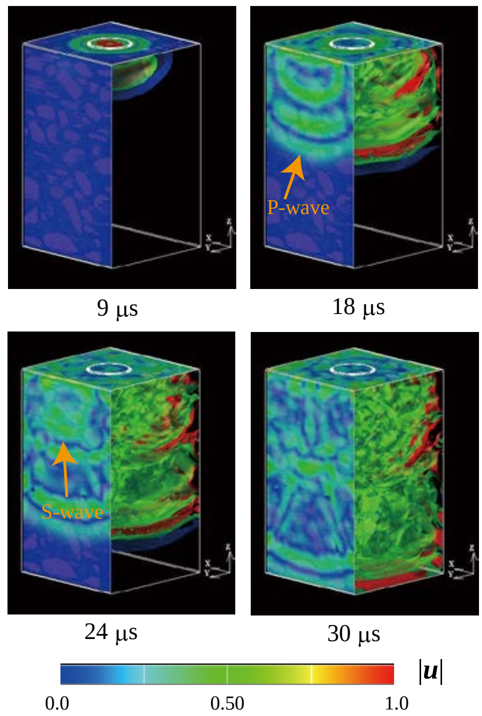
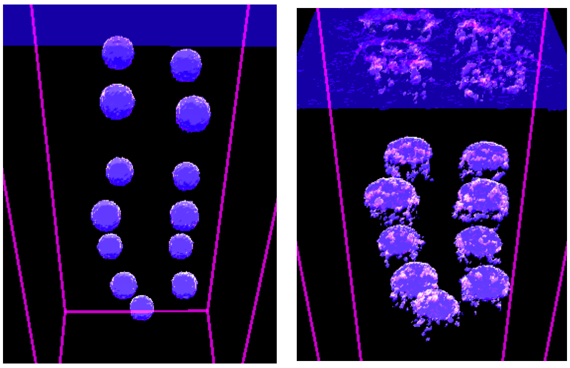


図 4　コンクリート中の弾性波伝搬の可視化

ボクセル総数は約 3.5 億個であり，3600 ステップの時間更新を要した．フラット MPI(Thin クラスタ，3D-MPI,64 プロセス)を用いて計算時間は 1 時間程であった．

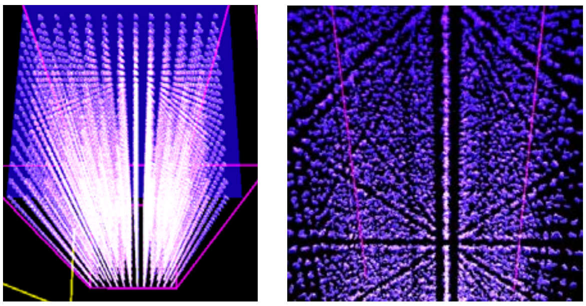
3.2 上昇気泡群シミュレーション【京都大：藤岡奨・牛島省】

気液界面を通した物質交換現象は，大気海洋間の CO_2 交換現象をはじめ，物質の撹拌や反応促進など機械工学や化学工学においても盛んに研究されている．本研究では，このような現象において生じる複雑な気液界面の変形及び移動を追跡するために気相・液相の混相流を扱うことができるマルチフェイズモデルである MICS(Multiphase Incompressible flow solver with Collocated grid System)(Ushijima *et al.*, J.JSCE, 2003)を用いて容器内を上昇する気泡群の 3 次元計算を行い，大規模計算における適用性を確かめた．ここでは，京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータを 2011 年 9 月 26 日 21 時から 2011 年 9 月 28 日 6 時まで及び 2011 年 11 月 6 日 9 時から 2011 年 11 月 6 日 21 時まで利用し，得られた成果を報告する．



(a) t= 0.0(s)　　(b) t=0.3(s)

図 5　上昇気泡群のスナップショット(1)



(a) 全体図(t=0.0(s))　　(b) 拡大図(t=0.045(s))

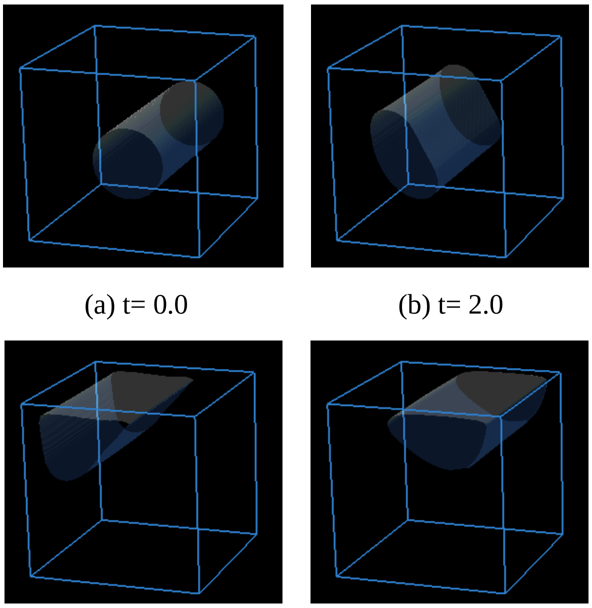
図 6　上昇気泡群のスナップショット(2)

最初の計算ケースでは，計 13 個の気泡群が自由水面をもつ水槽内に初期配置される．計算領域は $20\times20\times60\mathrm{cm}^3$ とし，約 350 万セルに分割した．図 5 に示されるとおり，t=0.3[s]において気泡は自由水面に達し，水面形を大きく変形させる様子を再現できた．続いて，約 9,700 個の上昇気泡群の数値計算を 1,024 並列環境で実行した．計算領域は $40\times40\times160[\mathrm{cm}^3]$とし，約 1,600 万セルに分割した．単一の気泡の直径に対して計算セルは約 10 個の割当てである．計算結果を図 6 に示す．180 ステップ計算の計算に対して 1,024 並列時の計算時間は約 7.5 時間であった．計算速度は 16 並列の計算に対して約 51 倍となり，当初の計画に対して一定の成果が得られた．

3.3 物体輸送のための Euler 型固液二相流解析【京都大：永井克明・牛島省】

本研究では，比較的スケールの大きい物体を含む流れや自由水面流れのように，固気液多相間の相互作用を考慮しなければならない流動現象に対する数値計算法について検討している．解法の最終的な適用対象としては，津波や洪水等の災害時に，自由水面の変動を伴う流れによって船舶や家屋材などが輸送される現象や，漂流物を含む流れが建造物等に衝突して被害が生ずる事例などを考えている．現在は，上記の現象を再現するための計算手法の整備とその並列解法の構築に取り組んでおり，本手法を基本的な事例に適用することで大規模並列計算時の性能を確かめた．ここでは，京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータを 2011 年 11 月 5 日 15 時から 2011 年 11 月 5 日 21 時まで利用し，得られた成果を報告する．計算結果を図 7 に示す．上面が速度 1.0 で移動する 3 次元キャビティ内において，円柱状の超弾性体が流体との相互作用により変形しながら移動する現象を時間発展的に計算した．前後の面は free-slip 条件とし，その他の面は no-slip 条件とした．固体の解析手法として，杉山らが考案した Euler 型解法(Sugiyama *et al.*, J. Computational Physics, 2011)を採用した．

本手法により，流体との連成計算や並列化を容易に行うことができる．固体は超弾性体の一種である Neo-Hooke 体とした. 流体計算セル数は約 1,700 万であり, 約 3,000 ステップ(t=6.4)の解析に対して 1,024 並列時の計算時間は約 3.5 時間であった．計算速度は 128 並列の計算に対して約 5 倍となり，当初の計画に対して一定の成果が得られた．



(a) t= 0.0　(b) t= 2.0

(c) t= 4.0　(d) t=6.0

図 7　3 次元キャビティ流れによる超弾性体の変形

3.4 粒子法(SPH 法)によるハイブリット並列計算【九州大：浅井光輝】

3.4.1 SPH 法の基礎式

SPH 法では，時刻 t における位置 $\boldsymbol{x}_i$ の関数 $\phi(\boldsymbol{x}_i,t)$は，影響半径 h 内に存在する近傍粒子上での値を用いて，一種の重み付き平均として近似する．

$$\phi(\boldsymbol{x}_i,t) \approx \langle \phi_i \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r_{ij},h)\phi_j(\boldsymbol{x}_j,t) \quad (1)$$

ここで，W は重み関数であり SPH 法の分野ではカーネル関数と呼ばれ，$r_{ij} = (|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|)$ は粒子 i と粒子 j の距離を示している．また，m_i, ρ_i は粒子 i が代表する領域の質量と密度である．なお，重み関数としてはスプライン関数（3 次あるいは 5 次の関数が用いられることが多い)，あるいはガウシアン関数などの釣鐘型の関数が用いられる．SPH 法では，関数の微分は，先の粒子離散近似したものをそのまま微分することで表現する．

$$\nabla\phi(r_i) \approx \langle \nabla\phi_i \rangle_{\mathrm{SPH}} = \frac{1}{\rho_i}\sum_j m_j(\phi_j - \phi_i)\nabla W(r_{ij},h) \quad (2)$$

本研究では，SPH 法には改良型 ISPH 法を提案し用いた．また，LES 乱流モデルの一種である Smagorinsky 渦粘性モデルを採用しており，このモデルでは物質固有の物性値である粘性 ν に，次式に示す渦粘性 ν_t を加算する．

$$\begin{aligned} \nu_t &= (C_s L)^2 S \\ S &= \sum_{i,j} \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \\ S_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで，C_s，L はモデル定数であり，それぞれ Smagorinsky 定数および初期の粒子間隔に依存する係数である．また S は，ひずみ速度テンソル S_{ij} から評価されるひずみ率である．

3.4.2 近傍粒子検索方法と並列化効率

粒子法の計算の中でも計算コストが高い演算の一つとして近傍粒子検索がある．現在開発中のコードは図 8 に示すツリー法を採用している．近傍粒子検索以外の計算はプロセス・スレッドのハイブリッド並列に対応しているが，近傍粒子検索についてはプロセス並列のみにしか対応していない．また，粒子法の計算では解析中に近傍粒子の対応番号が変更するため，メモリアクセスがランダムになり，キャッシュが有効に利用されていないものと考える．このためか，1024 コア(64 ノード，16 コア)を占有した際の並列効率は数十倍程度しか実現できていない．今後は，図 9 に示すリンクリスト検索方法に変更し，さらにリナンバリングを行いメモリの局所性を上げ，並列効率の向上を図る．

図 10 には約 500 万粒子を用いた粒子法による津波伝播解析例を示す．解析時間の制約もあり，遡上までの現象を再現することができなかったが，今後は並列化効率を向上させ，さらにリスタート機能を追加することで，長時間の津波伝播解析を実現させることを検討している．

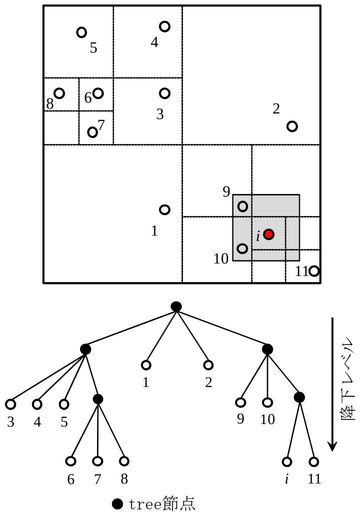


図 8　ツリー法による近傍粒子検索

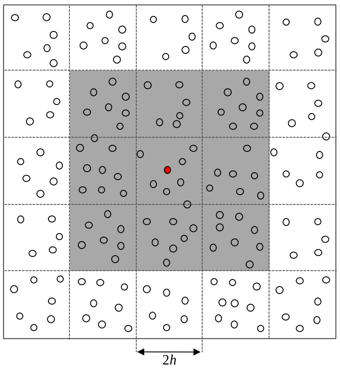


図 9　リンクリスト法による近傍粒子検索

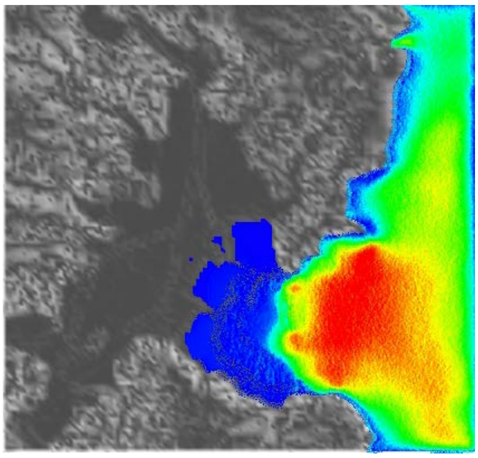


図 10　宮古市田老地区の津波計算例

3.5 Phase-Field モデルを用いた有限要素法による気液二相流計算【産総研：松本純一】

昨年度は，16 コアから 1024 コアの実行環境を使用し，約１千５百万，４千９百万，１億２千万自由度と段階を追って計算規模を大きくした際に高い並列度になる並列性能を確認するウィークスケーリング測定を行った．計算規模を大きくするにしたがって高い並列度が得られ，約１億２千万自由度の計算速度は 16 コアの計算に対して 1024 コアでは約 38 倍であった．16 コアから計算を実施した理由は，約１億２千万自由度の計算を実行するには約 180GB の記憶容量が必要であり，１コアでの計算が不可能なためである．計算を実施したいづれのケースにおいても 16 コアから 32 コアおよび 64 コアの並列効率はほぼ 100%となっているため，1 コアから 16 コアでの並列効率はほぼ 100%（計算速度 16 倍）と想定され，1024 コア使用時には 1 コアに対する計算速度は（16×38 倍＝）約 610 倍であると推定される．本計算プログラムは，非構造格子（四面体）を用いた任意形状，不規則分割に適用が可能であり，並列効率が向上し易い理想化されたものではなく，より汎用的で複雑な条件下での並列効率の検証であるため 1024 コア使用時で約 610 倍の計算速度（推定）は，ある程度評価できる並列度であると考えている．今年度は，実験結果との比較検証を進めるため昨年度に開発を行った計算プログラムにおいて，並列性能は保ったまま，より高い表面張力下でも計算が可能となる表面張力項の評価の改良，流入・流出を伴い場合においても体積保存が可能な体積補正法の提案を行った．昨年度実施した計算条件より表面張力係数を大きくし，領域をより広域にした約１億２千万自由度のミルククラウンの計算結果の効果を図 11 に示す．

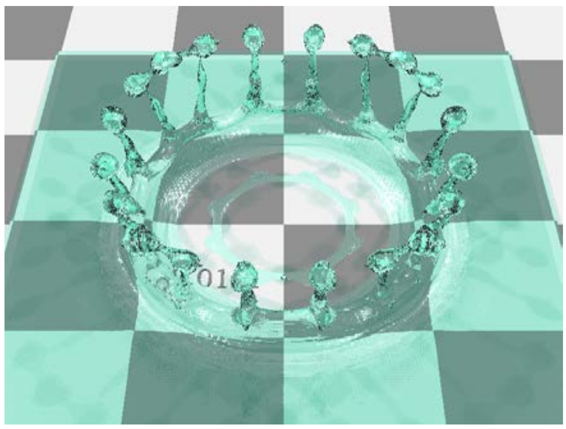


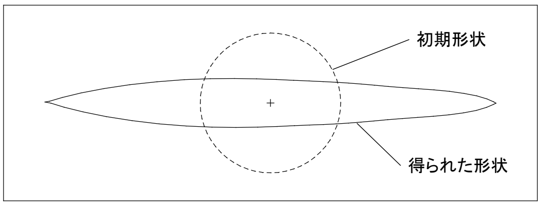
図 11　ミルククラウンの計算結果

計算時間は，1024 コアを使用し 1000 時間ステップの計算で約 12 時間であった．図 11 をみると液滴が水面に落下した後に生じるクラウン状の水面形状を確認できる．

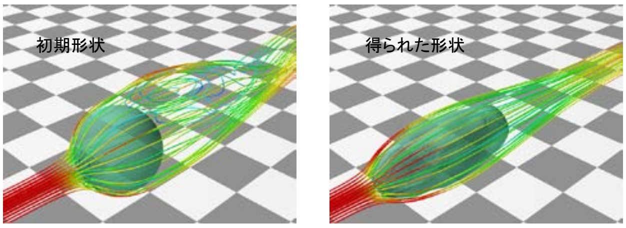
3.6 非定常 Navier-Stokes 方程式の形状最適化【産総研：松本純一】

設計条件などの最適化を単純なシミュレーションの繰返しによる試行錯誤で決定するのではなく，最適制御理論に基づいた最小化問題で設計条件などを計算機により適応的かつ自動的に決定する統合的数値解析技術の開発を目的とする．流体問題の逆解析は通常の流体解析コードよりもプログラミングが非常に煩雑であり，数百倍の計算時間を必要とするため，大規模計算が必須となる．今年度は，まず，図 12(a)の 2 次元円柱周りのカルマン渦が発生する非定常問題(Re=250)での抗力最小問題を対象にプログラムの並列化を実施し，その後，図 12(b)に示す 3 次元球円柱周りの螺旋状の渦が発生する非定常問題(Re=400)での抗力最小問題のプログラムの並列化および並列計算を実施した．

非定常Navier-Stokes方程式の形状最適化問題



(a) 2次元円柱周り【抗力最小・面積一定】の問題の結果 (Re=250)



(b) 3次元球周り【抗力最小・面積一定】の問題の結果 (Re=400)

図 12　抗力最小，面積一定の形状最適化問題

Navier-Stokes 方程式における最小化手法を用いた最適形状問題は，数値的に形状を求めていく反復過程において計算された形状が振動し，一般的に形状の波打ち現象が発生する．本研究では，この形状の波打ち現象を回避することのできる形状平滑化法を開発し，適用した結果が図 12(a)である．2 次元では，形状の振動を適切に緩和させるような平滑化作用の検討を行ったため良好な結果が得られている．図 12(b)は約 9 万自由度の 3 次元結果であるが計算時間が通常の流体解析に比べて約 500 倍と非常に長時間の計算であるため，適切な平滑化作用の検討を実施中である．現在，約 130 万自由度の 3 元並列計算も着手しているが，計算時間が非常にかかるため，最終形状を得られるに至っていない．今後は，より高速な並列化アルゴリズムや並列計算手法の検討を行う予定である．

4.　これまでの進捗状況と今後の展望

3.1 節の弾性波 FIT については，上述のようにコードの改善を行い，大規模並列時の性能も良好であることが分かった．今後は電磁波 FIT について同様の検証を行う予定である．また，現在 80 億ボクセル程度の計算を実施できているが，可視化までは至っていない，今後は大規模データのポスト処理（可視化）について検討を行いたい．

3.2 節では上昇気泡群の数値計算を実行し，現象を定性的に再現できることを確認した．今後は界面周辺の流れの詳細検討及び圧力計算における連立 1 次方程式の解法の高速化等が課題である．

3.3 節では Euler 型固液二相流れに対する並列計算法を構築した．本計算手法を基本的な事例に適用することにより，実現象への応用可能性を確認した．今後の課題として，計算効率の向上と固気液多相場への拡張があげられる．

3.4 と 3.6 節では，今後，並列化のアルゴリズムや並列プログラムの検討を行う予定である．3.5 節は，実験結果との比較検証を進める予定である．

上記のように，大規模計算技術の導入状況は計算力学の各分野において異なるので，以下のような項目に関する検討を並行して研究を進めている．

①与えられた基礎方程式系に対する数値解を高速に求めるための計算アルゴリズム
②連立 1 次方程式の高速解法
③既存の並列プログラムをさらに高速化するための計算機科学手法の導入
④各分野の研究者により得られた情報の共有と知識の蓄積
⑤連成問題に対する高速計算法
⑥最適化問題に対する高速計算法
⑦大容量の計算結果のハンドリングと可視化

図 13 に研究成果と今後の課題を示す．

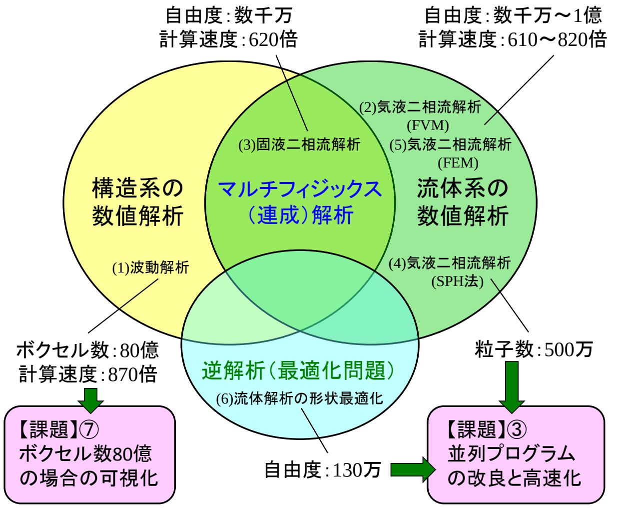


図 13　研究成果と今後の課題

図 13 に示すように，今年度の目標である構造解析，流体解析，連成解析では一千万から一億自由度，逆解析では百万自由度規模の計算は達成できたと考えている（(2)と(3)の計算速度は 16 コアと 128 コアの並列効率を 100%と想定し算出）．これは，①～⑦の検討をある程度，計画的に実施することが出来たためであると考えている．一方で，(1)の 80 億自由度といった大規模の計算では，可視化に対して現状の技術では課題⑦があることが解った．また，(4)と(6)では，100 万自由度以上の計算が可能であるが，並列効率や計算時間に問題があり，現状では，目的とする計算を最後まで実施することが難しいという課題③があることが判明した．今後は，抽出された課題③と⑦に関する検討に注力する所存である．

5.　研究成果リスト

(1) 学術論文

1) K. Nakahata, et al., Simulation of Ultrasonic and Electromagnetic Wave Propagation for Nondestructive Testing of Concrete using Image-based FIT, Journal of Computational Science and Technology, submitted to.

(2) 国際会議プロシーディングス

1) K. Nakahata, et al., Acceleration of the 3D Image-based FIT with an Explicit Parallelization Approach, Review of Progress in QNDE, Vol.31, in press.

2) T. Iga, et al., Simulation of Ultrasonic- and Electromagnetic-Wave Nondestructive Testings for Concrete with Image based FIT, Proceedings of International Conference on Advanced Technology in Experimental Mechanics 2011, OS11F081, 2011.

(3) 国際会議発表

1) J. Matsumoto, Application Problems for Computational Fluid Dynamics based on Orthogonal Basis Bubble Function FEM, COSEIK Annual Conference (Korea-Japan Workshop), April, 2011.

2) J. Matsumoto, T. Takada, and S. Matsumoto, One Hundred Million DOF Two-Phase Flow Analysis based on a Phase-Field Model using Implicit Finite Element Method, 11th US National Congress on Computational Mechanics, July, 2011.

(4) 国内会議発表

1) 中畑和之ら，投影光パタンから再構成した 3 次元数値モデルを用いた超音波伝搬解析，第 16 回計算工学講演会，2011 年 5 月

2) 伊賀達郎，中畑和之，電磁波非破壊検査のためのイメージベース FIT に関する検討，第 16 回計算工学講演会，2011 年 5 月

3) 藤岡奨，牛島省，多相流場の解法による上昇気泡群の気液界面面積評価，第 25 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 USB E11-1，2011 年 12 月

4) 松本純一，高田尚樹，松本壮平，Phase-Field モデルを用いた陰的混合有限要素法による一億自由度気液二相流解析，第 16 回計算工学講演会，2011 年 5 月

5) 松本純一，Navier-Stokes 方程式における形状最適化と平滑化法，第 16 回計算工学講演会，2011 年 5 月

6) 松本純一，Navier-Stokes 方程式の形状最適化と平滑化作用の考察，第 16 回計算工学講演会，2011 年 9 月